Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

5-лекция. Приближенное дифференцирование

Цель лекции – изучить методы приближённого (численного) дифференцирования функций, заданных таблично, на основе интерполяционных формул Ньютона; вывести формулы для вычисления первых и высших производных через конечные разности; исследовать порядок точности полученных формул и оценку погрешности численного дифференцирования.

План лекции:

1. Постановка задачи
2. Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона
3. Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих точек, выраженные через значения функции в этих точках
4. Контрольные вопросы
5. Список литературы

1 Постановка задачи

При решении практических задач часто нужно найти производные указанных порядков от функции $y = f(x)$, заданной таблично. Возможно также, что в силу сложности аналитического выражения функции $f(x)$ непосредственное дифференцирование ее затруднительно. В этих случаях обычно прибегают к приближенному дифференцированию. Для вывода формул приближенного дифференцирования заменяют данную функцию $f(x)$ на интересующем отрезке $[a, b]$ интерполирующей функцией $P(x)$ (чаще всего полиномом), а затем полагают:

$$f'(x) = P'(x), \qquad a \leq x \leq b. \tag{1.1}$$

Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков функции $f(x)$.

Если для интерполирующей функции $P(x)$ известна погрешность

$$R(x) = f(x) - P(x),$$

то погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x), \tag{1.2}$$

т. е. погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции. То же самое справедливо и для производных высших порядков.

Следует отметить, что, вообще говоря, приближенное дифференцирование представляет собой операцию менее точную, чем интерполирование. Действительно, близость друг к другу ординат двух кривых

$$y = f(x) \quad \text{и} \quad Y = P(x)$$

на отрезке $[a, b]$ еще не гарантирует близости на этом отрезке их производных $f'(x)$ и $P'(x)$, т. е. малого расхождения угловых коэффициентов касательных к рассматриваемым кривым при одинаковых значениях аргумента.

2 Формулы приближенного дифференцирования, основанные на первой интерполяционной формуле Ньютона

Пусть имеем функцию $y(x)$, заданную в равноотстоящих точках x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ отрезка $[a, b]$ с помощью значений $y_i = f(x_i)$. Для нахождения на $[a, b]$ производных $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ и т. д.

[1] функцию y приближенно заменим интерполяционным полиномом Ньютона, построенным для системы узлов $x_0, x_1, \ldots, x_k$ $(k \leq n)$.

Имеем:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 \quad + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \ldots \tag{2.1}$$

где

$$q = \frac{x - x_0}{h}, \qquad h = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

[1]Само собой разумеется, что заранее должно быть известно о существовании соответствующих производных функции $f(x)$, иначе выкладки носят иллюзорный характер.

Производя перемножение биномиов, получим:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2-q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3-3q^2+2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4-6q^3+11q^2-6q}{24}\Delta^4 y_0 + \ldots \tag{2.2}$$

Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dq},$$

то

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right]. \tag{2.3}$$

Аналогично, так как

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq}\cdot\frac{dq}{dx},$$

то

$$y''(x) = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right]. \tag{2.4}$$

Таким же способом в случае надобности можно вычислить и производные функции $y(x)$ любого порядка. Заметим, что при нахождении производных $y'(x)$, $y''(x)$, … в фиксированной точке x в качестве x_0 следует выбирать ближайшее табличное значение аргумента.

Иногда требуется находить производные функции y в основных табличных точках x_i. В этом случае формулы численного дифференцирования упрощаются. Так как каждое табличное значение можно считать за начальное, то положим $x = x_0$, $q = 0$; тогда будем иметь:

$$y'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \ldots\right), \tag{2.5}$$

и

$$y''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 y_0 + \ldots\right). \tag{2.6}$$

Если $P_k(x)$ — интерполяционный полином Ньютона, содержащий разности Δy_0, $\Delta^2 y_0$, …, $\Delta^k y_0$, и

$$R_k(x) = y(x) - P_k(x)$$

— соответствующая погрешность, то погрешность в определении производной есть

$$R_k'(x) = y'(x) - P_k'(x).$$

Как известно,

$$R_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)}{(k+1)!}\, y^{(k+1)}(\xi) = h^{k+1}\frac{q(q-1)\dots(q-k)}{(k+1)!}\, y^{(k+1)}(\xi), \tag{2.7}$$

где ξ — некоторое промежуточное число между значениями $x_0, x_1, \dots, x_k, x$. Поэтому, предполагая, что $y(x) \in C^{k+2}$, получим:

$$R_k'(x) = \frac{dR_k}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} = \frac{h^k}{(k+1)!}\left\{ y^{(k+1)}(\xi)\frac{d}{dq}\big[q(q-1)\dots(q-k)\big] + q(q-1)\dots(q-k)\frac{d}{dq}\big[y^{(k+1)}(\xi)\big]\right\}.$$

Отсюда при $x = x_0$, и, следовательно, при $q = 0$, и учитывая, что

$$\frac{d}{dq}\big[q(q-1)\dots(q-k)\big]\bigg|_{q=0} = (-1)^k k!,$$

будем иметь:

$$R_k'(x_0) = (-1)^k \frac{h^k}{k+1}\, y^{(k+1)}(\xi). \tag{2.8}$$

Так как $y^{(k+1)}(\xi)$ во многих случаях трудно оценить, то при h малом приближённо полагают:

$$y^{(k+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{k+1} y_0}{h^{k+1}},$$

и, следовательно,

$$R_k'(x_0) \approx \frac{(-1)^k}{h}\,\frac{\Delta^{k+1} y_0}{k+1}. \tag{2.9}$$

Аналогично может быть найдена погрешность $R_k''(x_0)$ для второй производной $y''(x_0)$.

Пример 1. Найти $y'(50)$ функции $y = \lg x$, заданной таблично (таблица 1).

Таблица 1: *Значения функции* $y = \lg x$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1,6990	414	-36	5
55	1,7404	378	-31	
60	1,7782	347		
65	1,8129			

Решение. Здесь $h = 5$. Дополняем таблицу 1 столбцами конечных разностей (десятичные разряды, как обычно, не указываются; они определяются десятичными разрядами значений функции).

Используя первую строчку таблицы, на основании формулы (2.5), с точностью до разностей третьего порядка, будем иметь:

$$y'(50) = \frac{1}{5}\,(0{,}0414 + 0{,}0018 + 0{,}0002) = 0{,}0087.$$

Для оценки точности найденного значения заметим, что так как табулированная выше функция есть $y = \lg x$, то

$$y'_x = \frac{M}{x} = \frac{0{,}43429}{x}.$$

Следовательно,

$$y'(50) = \frac{0{,}43429}{50} = 0{,}0087.$$

Таким образом, результаты совпадают с точностью до четвертого десятичного знака.

Пример 2. Путь $y = f(t)$, пройденный прямолинейно движущейся точкой за время t, дается следующей таблицей:

i	Время t_i, сек	Путь $y(t_i)$, см
0	0,00	0,000
1	0,01	1,519
2	0,02	6,031
3	0,03	13,397
4	0,04	23,396
5	0,05	35,721
6	0,06	50,000
7	0,07	65,798
8	0,08	82,635
9	0,09	100,000

Используя конечные разности до пятого порядка включительно, приближенно найти скорость

$$V = \frac{dy}{dt}$$

и ускорение

$$W = \frac{d^2y}{dt^2}$$

точки для моментов $t = 0;\ 0{,}01;\ 0{,}02;\ 0{,}03;\ 0{,}04.$

Решение. Составляем таблицу разностей.

Таблица 2: *Конечные разности функции* $y = f(t)$

i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0	1,519	2,993	-0,139	-0,082	-0,004
1	4,512	2,854	-0,221	-0,086	0,021
2	7,366	2,633	-0,307	-0,065	0,002
3	9,999	2,326	-0,372	-0,063	0,018
4	12,325	1,954	-0,435	-0,045	0,014
5	14,279	1,519	-0,486	-0,031	—
6	15,798	1,039	-0,511	—	—
7	16,837	0,528	—	—	—
8	17,365	—	—	—	—
9	—	—	—	—	—

Полагая $h = 0{,}01$ и применяя формулы (2.5) и (2.6), получаем приближенные значения величины скорости V (см/сек) и величины ускорения W (см/сек^2). Например,

$$V(0) = 100\,(1{,}519 - 1{,}496 - 0{,}046 + 0{,}020 - 0{,}001) = -0{,}4 \text{ см/сек},$$

$$W(0) = 10\,000\,(2{,}993 + 0{,}139 - 0{,}075 + 0{,}003) = 30\,600 \text{ см/сек}^2.$$

Соответствующие значения V и W помещены в таблице 3.

Таблица 3: *Значения скорости V и ускорения W* для закона движения $y = f(t)$

t	V	W	$\tilde{V}$	$\tilde{W}$
0,00	0,4	30600	0,00	30462
0,01	303,6	29780	303,08	30001
0,02	596,3	28780	596,98	28625
0,03	873,2	26250	872,66	26381
0,04	1121,7	23360	1121,9	23340

Заметим, что табулированный закон движения дается формулой

$$y = 100\left(1 - \cos\frac{50\pi t}{9}\right).$$

Отсюда

$$V = \frac{dy}{dt} = \frac{5000\pi}{9}\sin\frac{50\pi t}{9},$$

и

$$W = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{250000\pi^2}{81}\cos\frac{50\pi t}{9}.$$

Для сравнения точные значения $\tilde{V}$ и $\tilde{W}$ приведены в правой половине таблицы 3.

Отметим, что можно вывести также формулы приближенного дифференцирования, исходя из второй интерполяционной формулы Ньютона.

3 Формулы численного дифференцирования для равноотстоящих точек, выраженные через значения функции в этих точках

Пусть точки x_0, x_1, x_2, $\ldots$, x_n — равноотстоящие, т. е.

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

и пусть для функции $y = y(x)$ известны значения $y_i = y(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Для данной системы узлов x_i построим интерполяционный полином Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Pi_{n+1}(x)\, y_i}{(x - x_i)\, \Pi'_{n+1}(x_i)},$$

где

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

Тогда

$$L_n(x_i) = y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Полагая

$$\frac{x - x_0}{h} = q,$$

получим:

$$\Pi_{n+1}(x) = h^{\,n+1} q(q-1)\cdots(q-n) = h^{\,n+1} q^{[n+1]},$$

и

$$\begin{aligned} \Pi'_{n+1}(x_i) &= (x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) \\ &= h^{\,n}\, i(i-1)\cdots 1\,(-1)\cdots\big[-(n-i)\big] = (-1)^{\,n-i} h^{\,n} i!(n-i)! \end{aligned} \tag{3.1}$$

Следовательно, для полинома Лагранжа $L_n(x)$ имеем выражение

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{\,n-i} y_i}{i!(n-i)!} \cdot \frac{q^{[n+1]}}{q-i}. \tag{3.2}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{dx}{dq} = h,$$

получаем:

$$y'(x) \approx L_n'(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{\,n-i} y_i}{i!(n-i)!} \frac{d}{dq} \left(\frac{q^{[n+1]}}{q-i} \right). \tag{3.3}$$

Аналогично могут быть найдены производные высших порядков данной функции $y(x)$. Для оценки погрешности

$$r_n(x) = y'(x) - L_n'(x)$$

воспользуемся известной формулой погрешности интерполяционной формулы (3.2)

$$R_n(x) = y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \,\Pi_{n+1}(x), \tag{3.4}$$

где $\xi = \xi(x)$ — промежуточное значение между точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и x.

Предполагая, что $y(x) \in C^{(n+2)}$, выводим:

$$r_n(x) = R_n'(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ y^{(n+1)}(\xi)\, \Pi_{n+1}'(x) + \Pi_{n+1}(x) \,\frac{d}{dx} \big[y^{(n+1)}(\xi) \big] \right\}.$$

Отсюда, учитывая формулу (3.1) , получаем погрешность производной в узлах

$$R_n'(x_i) = (-1)^{\,n-i} h^{\,n} \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}\, y^{(n+1)}(\xi), \tag{3.5}$$

где ξ — промежуточное значение между $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

I. Произведем расчет для $n = 2$ (три точки). Из формулы (3.2) получаем:

$$L_2(x) = \frac{1}{2} y_0 (q-1)(q-2) - y_1 q(q-2) + \frac{1}{2} y_2 q(q-1).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\frac{dx}{dq} = h,$$

будем иметь:

$$y'(x) \approx L_2'(x) = \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} y_0 (2q-3) - y_1 (2q-2) + \frac{1}{2} y_2 (2q-1) \right].$$

В частности, для производных

$$y'(x_i) = y_i', \qquad (i = 0, 1, 2).$$

получим следующие выражения:

$$y_0' = \frac{1}{2h}\,(-3y_0 + 4y_1 - y_2); \qquad y_1' = \frac{1}{2h}\,(-y_0 + y_2); \qquad y_2' = \frac{1}{2h}\,(y_0 - 4y_1 + 3y_2).$$

с соответствующими погрешностями:

$$r_0 = \frac{1}{3}h^2 y'''(\xi_0); \qquad r_1 = -\frac{1}{6}h^2 y'''(\xi_1); \qquad r_2 = \frac{1}{3}h^2 y'''(\xi_2).$$

Приведем без доказательства формулы дифференцирования для четырех и пяти точек [3], справедливость которых читатель легко может проверить самостоятельно.

II. $n = 3$ **(четыре точки).**

$$y_0' = \frac{1}{6h}\,(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4}\,y^{(4)}(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{6h}\,(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12}\,y^{(4)}(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{6h}\,(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12}\,y^{(4)}(\xi);$$

$$y_3' = \frac{1}{6h}\,(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4}\,y^{(4)}(\xi).$$

III. $n = 4$ **(пять точек).**

$$y_0' = \frac{1}{12h}\,(-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4) + \frac{h^4}{5}\,y^{(5)}(\xi),$$

$$y_1' = \frac{1}{12h}\,(-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4) - \frac{h^4}{20}\,y^{(5)}(\xi),$$

$$y_2' = \frac{1}{12h}\,(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + \frac{h^4}{30}\,y^{(5)}(\xi),$$

$$y_3' = \frac{1}{12h}\,(-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4) - \frac{h^4}{20}\,y^{(5)}(\xi),$$

$$y_4' = \frac{1}{12h}\,(3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4) + \frac{h^4}{4}\,y^{(5)}(\xi).$$

Формула численного дифференцирования выражается более просто и обладает повышенной точностью. Ниже приводятся для случая $n = 2$ и $n = 4$ формулы таких центральных производных [3], причём для выявления симметрии изменена нумерация точек (рисунок 1):

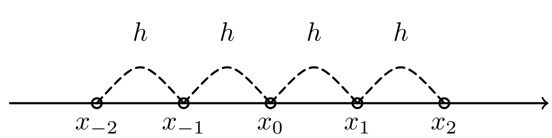

Рисунок 1.

I. $n = 2$**.**

$$y_0' = \frac{1}{2h}(y_1 - y{-}1) - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\xi),$$

где $y_i = y(x_i)$ и $i = -1, 0, 1$.

II. $n = 4$**.**

$$y_0' = \frac{2}{3h}(y_1 - y{-}1) - \frac{1}{12h}(y_2 - y_{-2}) + \frac{h^4}{30} y^{(5)}(\xi),$$

где $y_i = y(x_i)$ и $i = -2, -1, 0, 1, 2$.

4 Контрольные вопросы

1. В чём состоит задача приближённого (численного) дифференцирования функции?
2. Почему приближённое дифференцирование, вообще говоря, является менее точной операцией, чем интерполирование?
3. Запишите первую интерполяционную формулу Ньютона для равноотстоящих узлов.
4. Как получить формулу для первой производной $y'(x)$ из интерполяционного многочлена Ньютона?
5. Запишите формулы для $y'(x_0)$ и $y''(x_0)$ через конечные разности.
6. Как записывается остаточный член интерполяционного многочлена Ньютона и как из него получить оценку погрешности производной?
7. Как влияет шаг сетки h на точность приближённого дифференцирования?

5 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–10].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Scarborough, James. *Numerical Mathematical Analysis.* Moscow–Leningrad: GTTI, 1934.

[2] Mikeladze, Sh. E. *Chislennye metody matematicheskogo analiza*. Moscow: Gostekhizdat, 1953.

[3] Milne, William E. *Numerical Analysis*. Moscow: Inostrannaya Literatura, 1951.

[4] Runge, Carl. *Graphical Methods of Mathematical Computation*. Moscow–Leningrad: GTTI, 1932.

[5] Krylov, A. N. *Lektsii o priblizhennykh vychisleniyakh*. 6th ed. Moscow: Gostekhizdat, 1954.

[6] Шакенов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы*. Алматы: 2019.

[7] Сұлтанғазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы*. Алматы: Білім, 2016.

[8] Демидович, В. П., және Е. Б. Марон. *Основы вычислительной математики*. Москва: Наука, 1970.

[9] Уиттекер, Э., и Г. Робинсон. *Математическая обработка результатов наблюдений*. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1933. Гл. I.

[10] Гончаров, В. Л. *Теория интерполирования и приближения функций*. Москва–Ленинград: ГТТИ, 1934. Гл. I, §§ 18–21.